



TITLE:

成層流体中を鉛直移動する球周りの流れ (オイラー方程式250年: 連続体力学におけるオイラーの遺産)

AUTHOR(S):

柏本, 和俊; 花崎, 秀史

CITATION:

柏本, 和俊 ...[et al]. 成層流体中を鉛直移動する球周りの流れ (オイラー方程式250年: 連続体力学におけるオイラーの遺産). 数理解析研究所講究録 2008, 1608: 168-179

ISSUE DATE:

2008-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/139980>

RIGHT:

成層流体中を鉛直移動する球周りの流れ

京都大学大学院 工学研究科 柏本 和俊 (Kazutoshi Kashimoto), 花崎 秀史 (Hideshi Hanazaki)

Graduate School of Engineering

Kyoto University

1 はじめに

地球上の大気、あるいは海洋における流体は密度が一様ではなく、何らかの要因により、鉛直方向に密度勾配をもっている場合がほとんどである。このような流体の流れは密度成層流と呼ばれ、工学的な応用のほか、大気や海洋中での流れや物体の運動を考える上で重要である。

海洋の鉛直流速 W は非常に遅く、典型的には $W = 1\text{cm/sec}$ 以下である。そのため、成層の強さを表すフルード数 $Fr = W/NL$ (N : プラント・ヴァイサラ振動数 (海洋中層で $\sim 10^{-2}/\text{sec}$)、 L : 物体の代表サイズ) は、意外に小さい値をとる。例えば長さ $L \sim 100\text{cm}$ の海洋観測ブイの場合、 $Fr \sim 1$ 程度となり、成層が運動に与える影響は大きい。

一方、海洋プランクトンの鉛直運動も海洋中の炭素循環において重要な意味を持つ。代表的な海洋プランクトンのカイアシの場合、鉛直運動のフルード数が $Fr = 1 \sim 50$ であり、成層の効果はかなり強く受けていると考えられる。

従来の成層流体中の物体の鉛直運動に関する研究としては、Ochoa & Van Woert(1977) [1] による塩分成層を用いた水槽実験における球周りの流れの可視化、また Torres ら (2000)[2] による球周りの流れについての数値計算があるが、水平運動に比べると研究はほとんど進んでいない。これらの研究においては、成層が強くなるにつれて、球の後方の軸対称渦 (レイノルズ数 $Re (= WL/\nu)$, ν は流体の動粘性率) が 200 以下の場合) が次第に縮小して消滅し、球の移動速度に比べて最大 10 倍程度も速いジェットが球の後方に鉛直軸に沿って生じ、同時に球に働く抵抗が非常に増大することが知られている。

本研究では水槽中に塩分成層を作成し、その中を球を一定速度で移動させ、その周りの流れをシャドウグラフ法によって可視化した。特に、この流体系を支配するパラメーターであるレイノ

ルズ数 Re 及びフルード数 Fr による流れの変化を、球の後流に生じるジェットのパターン変化を中心に調べた。

また、鉛直軸まわりの軸対称性を仮定した数値シミュレーションも行い、実験結果との比較を行った。

2 支配方程式

本実験では、鉛直密度勾配が一定である成層流体中を球を一定の速さで下方または上方へ動かす。

成層流体の流れを支配する方程式は次のようになる：

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\frac{D\tilde{\mathbf{u}}}{D\tilde{t}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla}\tilde{p} - g\hat{\mathbf{z}} + \nu\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{u}} \quad , \quad (2.2)$$

$$\frac{D\tilde{\rho}}{D\tilde{t}} = \kappa\tilde{\nabla}^2\tilde{\rho} \quad . \quad (2.3)$$

ここで、 \tilde{t} は時間、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は流速ベクトル、 \tilde{p} は圧力、 $\tilde{\rho}$ は密度を表す次元量であり、 g は重力加速度、 $\hat{\mathbf{z}}$ は鉛直方向の単位ベクトル、 ν は流体の動粘性係数、 κ は密度の拡散係数を表している。式 (2.1) は $\tilde{\rho}^{-1}D\tilde{\rho}/D\tilde{t}$ の値が十分小さいと仮定した場合の質量保存則である。この近似は鉛直方向の密度変化が小さいという条件下で正しい。式 (2.2) はナヴィエ・ストークス方程式である。また、式 (2.3) は密度の輸送方程式である。

球を一定の速さ W で鉛直下向きに動かすとき、球の中心を原点とする座標系を考えると、平均場の密度 ρ_e とそれに対する静水圧 p_e は時間 \tilde{t} とともに連続的に変化し、高さ \tilde{z} において次のような値をとる：

$$\rho_e(\tilde{z}, \tilde{t}) = \rho_0 + \frac{\partial \rho_e}{\partial \tilde{z}}(\tilde{z} - W\tilde{t}) \quad , \quad (2.4)$$

$$p_e(\tilde{z}, \tilde{t}) = - \int_0^{\tilde{z}} \rho_e(\tilde{z}, \tilde{t}) g d\tilde{z} \quad . \quad (2.5)$$

ここで、 $\partial \rho_e / \partial \tilde{z}$ は (物体による攪乱のない) 鉛直方向の勾配であり、ここでは一定であると仮定している。また、 $\rho_0 = \rho_e(\tilde{z} = 0, \tilde{t} = 0)$ である。

式 (2.4) および式 (2.5) で表される平均場と、密度の攪乱 $\hat{\rho}$ および圧力の攪乱 \hat{p} の和から、全密度、全圧力は次のようになる:

$$\tilde{\rho} = \rho_e(\tilde{z}, \tilde{t}) + \hat{\rho} \quad , \quad (2.6)$$

$$\tilde{p} = p_e(\tilde{z}, \tilde{t}) + \hat{p} \quad . \quad (2.7)$$

式 (2.6)、(2.7) を式 (2.2)、(2.3) に代入し、ブシネスク近似を用いると、次の式が得られる:

$$\frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} = -\frac{1}{\rho_0} \tilde{\nabla} \hat{p} - \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} g \tilde{z} + \nu \tilde{\nabla}^2 \tilde{u} \quad , \quad (2.8)$$

$$\frac{D\hat{\rho}}{D\tilde{t}} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial \tilde{z}} (\tilde{w} - W) + \kappa \tilde{\nabla}^2 \hat{\rho} \quad . \quad (2.9)$$

式 (2.1)、(2.8)、(2.9) において、長さを球の直径 $2a$ (a : 球の半径)、速度を W 、圧力攪乱を $\rho_0 W^2$ 、密度攪乱を $-2a \partial \rho_e / \partial \tilde{z}$ によって無次元化すると、次の式が得られる:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (2.10)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p - \left(\frac{2}{Fr} \right)^2 \rho \hat{z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad , \quad (2.11)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = w - 1 + \frac{1}{Pe} \nabla^2 \rho \quad . \quad (2.12)$$

ここで、フルード数 Fr は $Fr = W/Na$ 、レイノルズ数 Re は $Re = 2Wa/\nu$ 、ペクレ数 Pe は $Pe = ReSc$ である。ただし、 Sc はシュミット数 $Sc(= \nu/\kappa)$ で、 N はプラント・ヴァイサラ振動数であり、次のように定義される:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_e}{\partial \tilde{z}} \quad . \quad (2.13)$$

実験では $30 \leq Re \leq 3000$ 、 $0.2 \leq Fr \leq 100$ の範囲について、また、数値計算は Re を 200 に固定し、 $0.3 \leq Fr \leq 20$ の範囲について球後方の流れ場を調べた。

3 実験装置

図 1 に実験装置の概略図を示す。まずタンク A、タンク B、水槽 C を用いて、水槽 C 内に塩分成層した流体を生成する。次に、水槽 C 内において球を上下方向に鉛直移動させ、シャドウグラフィ法によって流れを可視化する。

本実験ではブラント・ヴァイサラ振動数 N 、球の半径 a 、そして球の鉛直移動速度 W の3つを変えることによって Re と Fr を変化させた。実験に用いた N の範囲は $0.2\text{rad/sec} \leq N \leq 1.6\text{rad/sec}$ であり、また、 W は $0.5\text{cm/sec} < W < 10\text{cm/sec}$ の範囲である。球の大きさは $a = 0.3, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5\text{cm}$ の6種類を用いた。範囲で変化させることができる。

4 数値計算法

数値計算はMAC法を用いて行った。計算領域は水平、鉛直方向に球の直径のそれぞれ10倍、20倍の大きさを持つ楕円形のO型格子とした。中心軸付近の領域 ($r \leq 0.036, z > 0$) においては遠方でも格子間隔が十分小さくなるよう、格子を r 方向に等間隔とした。式(2.12)より、 $Re = 200, Sc = 700$ のとき、密度境界層の厚さは $1/\sqrt{Pe} \sim 2.7 \times 10^{-3}$ と見積もられるので、境界層内部に格子を5点程度配置するため、球表面、及び鉛直軸付近の格子間隔は 6.0×10^{-4} となるようにした。

5 実験結果

シャドウグラフ実験を行ったパラメータ領域 ($Re - 1/Fr$) を図3に示す。ここで、球後方の流れをジェットの状態から6種類に分類し、図中に領域A,B,C,D,E,Fで示した。各領域における可視化写真の代表例を図4に示す。これより、領域A,B,Cにおいては、流れは鉛直軸に関して軸対称、領域D,E,Fにおいては非軸対称になっていることがわかる。

本稿で用いる可視化写真はすべて下向き移動時のものであるため、中心軸(上方から引っ張られてきた密度の小さい流体が上方へ戻る経路となる)は暗く写っている。

5.1 領域A

領域Aでは細い直線状のジェットが発生し、ある程度下流(上方)に進んだ所でジェットまわりに帽子状の乱れが発生し、さらに上方では蛇行が生じる。(図4A、図5)

球の下流側淀み点からジェットまわりに乱れが発生するまでの距離をジェットの長さ L_A と定義し、図6に $L_A/2a$ の Fr 依存性を示す。この図より Fr と $L_A/2a$ はほぼ比例する

($L_A/2a \sim 3Fr$, $L_A \sim 6W/N$) ことがわかる。また、 Re 依存性はほとんどみられなかった。このことから、ジェットの長さは球の半径 a によらず、成層の強さだけで決まることがわかる。具体的には、後述するように内部重力波の波長で決まると考えられる。(図 9)

5.2 領域 B

領域 A と同程度の太さの直線状のジェットが発生が、帽子状の乱れが見られなかった領域を領域 B とする。ジェットの長さを示す式 $L_A/2a = 3Fr$ から決定される内部重力波の波長が、観測可能領域を越えたわけではなく、帽子が発生すると考えられる位置に、帽子が見られない。実際の流れ場は Re と Fr のみで決定されるが、シャドウグラフのコントラストは密度変化の大きさ (N に依存) や密度変動の大きさ (a に依存) によって変わる。このため、実際には帽子が発生しているものの、像に写っていないと考えられる。このため、領域 A と B の境界は N と a によって決まると考えられる。

5.3 領域 C

領域 C では領域 A、B で見られるジェットに比べて太いジェットが見られる。この領域では黒い筋が複数本見えるが、ジェットの太さ T_C を一番外側の黒い部分の間隔で定義すると、 $0.195 \leq T_C/2a \leq 0.683$ の値をとる。ジェットの太さは、ほぼ Fr だけで決まり、 $T_C/2a \sim 0.23Fr^{1/3}$ の関係がある (図 7)。

5.4 領域 D (周期的に節が発生)

この領域では、周期的に節のようなふくらみが発生して鉛直上方へ移動する。

5.5 領域 E (らせん状ジェット)

この領域では、ジェットが流れの中心軸まわりに回転しながら上昇し、らせん状の構造を形成する様子が見られた。

5.6 領域 F (乱れたジェット)

この領域では Re が大きい、球後方の流れは乱流になっている。

6 数値計算との比較

数値計算は、軸対称性を仮定しているため、実験結果との比較は領域 A,B,C に限定される。シャドウグラフ実験で得られるスクリーン (図 1) 上の濃淡は、流体密度の鉛直断面内での二階微分の変化によるものであり、以下の式で示される。本研究では実験と数値計算の比較を行うため、数値計算結果から

$$\int \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) dy, \quad (6.1)$$

の値を計算し、その分布をグレースケールで示した (図 8)。領域 A においては実験結果同様に数値計算においても Fr とジェットの長さ L_A は Fr に比例し ($L_A/2a = 3Fr$)、実験結果と一致することがわかる。

また、実験室系 (静止系) から見たときの鉛直速度の等高線を描くと図 9 のようになり、 $w = 0$ の線が内部重力波のパターンを表す。この図において、内部重力波の一波長分だけ球よりも上方の位置において、ジェットのまわりに鉛直速度が下向きになる部分 (破線部) が発生し、これが帽子状の乱れの発生する位置と一致する。つまり帽子の発生する位置は内部重力波の波長によって決まる。線形理論 [2,3] により、内部重力波の等位相線の座標が以下の式で表されることがわかっている。

$$r = Fr\Phi \left(\frac{(\sigma^{-4} + \sigma^{-2} - 1)(1 - \sigma^2)^{-3}}{(1 - \sigma^2)^{-3} + \sigma^2(2 - \sigma^2)^2} \right)^{1/2}, \quad (6.2)$$

$$z = Fr\Phi\sigma(2 - \sigma^2) \left(\frac{\sigma^{-4} + \sigma^{-2} - 1}{(1 - \sigma^2)^{-3} + \sigma^2(2 - \sigma^2)^2} \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

ここで σ は媒介変数 ($0 < \sigma < 1$)、 Φ は位相を示し、 $\Phi = (n - 1/4)\pi$ が $w = 0$ に対応する。式 (6.2) より ($r = 0$) となるのは $\sigma \rightarrow 1$ のときであり、このとき z は、

$$z = Fr\Phi. \quad (6.4)$$

となり、 $w = 0$ となる点の鉛直座標、すなわちジェットの長さは、 Fr に比例することがわかる。これは、実験結果と一致する。

7 結論

シャドウグラフを用いた実験により、成層流体中を鉛直移動する物体の後流のパターンは大きくわけて 6 種類あることがわかった。ジェットが軸対称な領域については、ジェットの長さとおさが Fr 依存性を持っていることがわかった。特にジェットの長さについては、数値計算との比較により、内部重力波の節点の間隔 (波長) によって決まることがわかった。

参考文献

- [1] Ochoa, J. L. & Van Woert, M. L. 1977 Flow visualization of boundary layer separation in a stratified fluid. Unpublished report, Scripps Institution of Oceanography, pp. 28.
- [2] Torres, C. R., Hanazaki, H., Ochoa, J., Castillo, J. & Van Woert, M. 2000 Flow past a sphere moving vertically in a stratified diffusive fluid. *J. Fluid Mech.* **417**, 211-236.
- [3] Mowbray, D. E. & Rarity, B. S. H. 1967 The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid. *J. Fluid Mech.* **30**, 489-495.
- [4] D'Asaro, E. 2003 Performance of autonomous Lagrangian floats. *J. Atmos. Oceanic Technol.* **20**, 896-911.

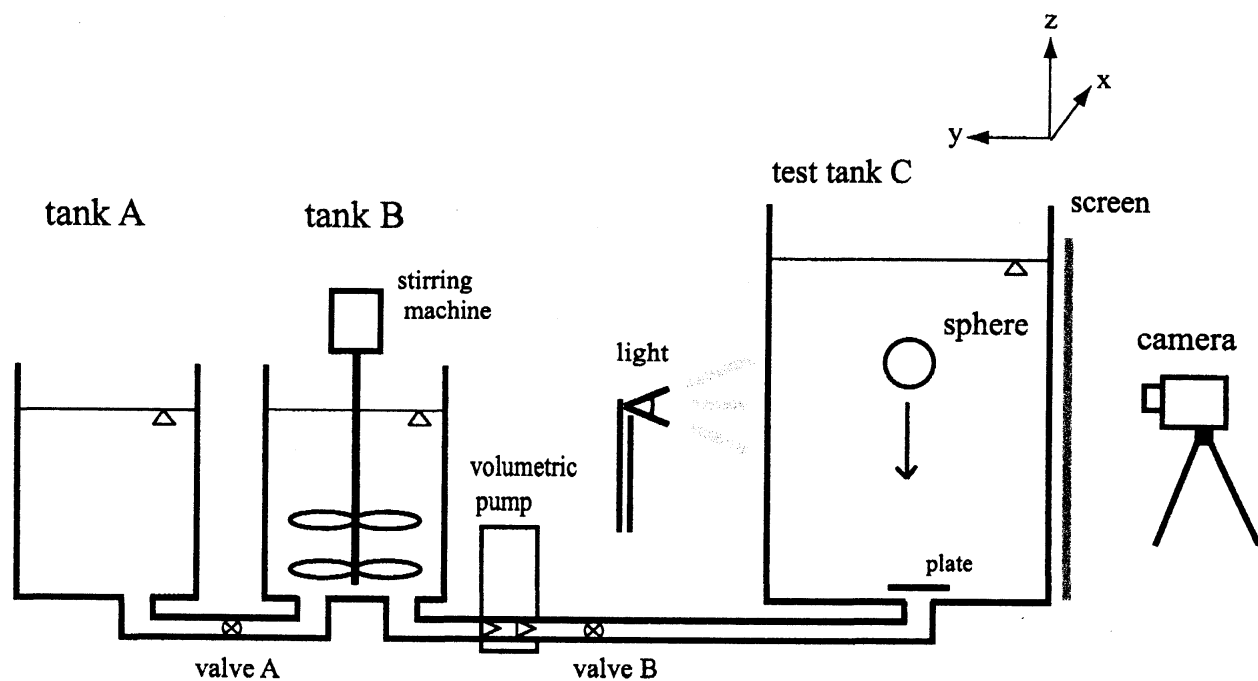


図 1 実験装置の概略図

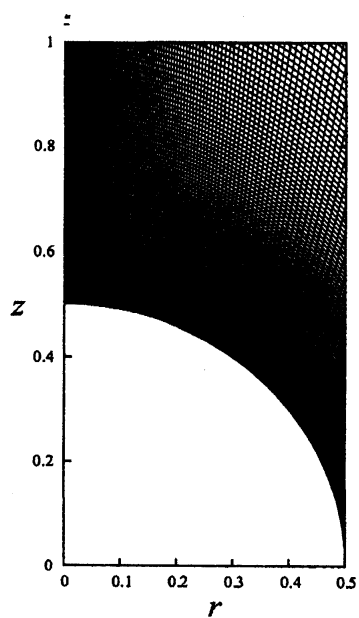


図 2 計算格子.

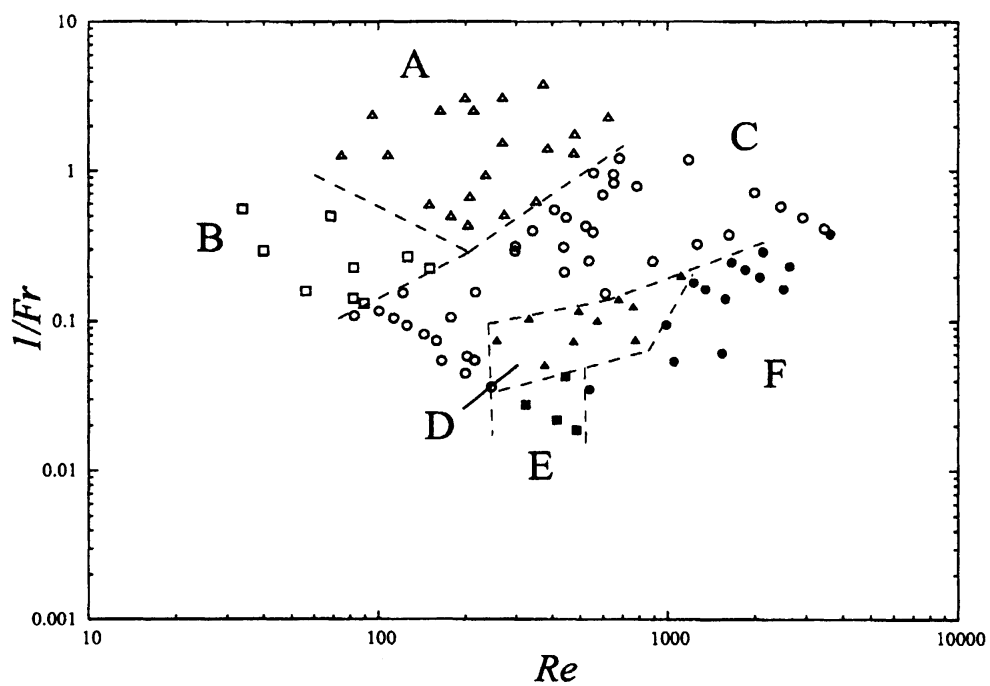


図3 シャドウグラフ実験を行ったパラメーター領域. 後流の形状によって6つの領域 A、B、C、D、E、F に分類.

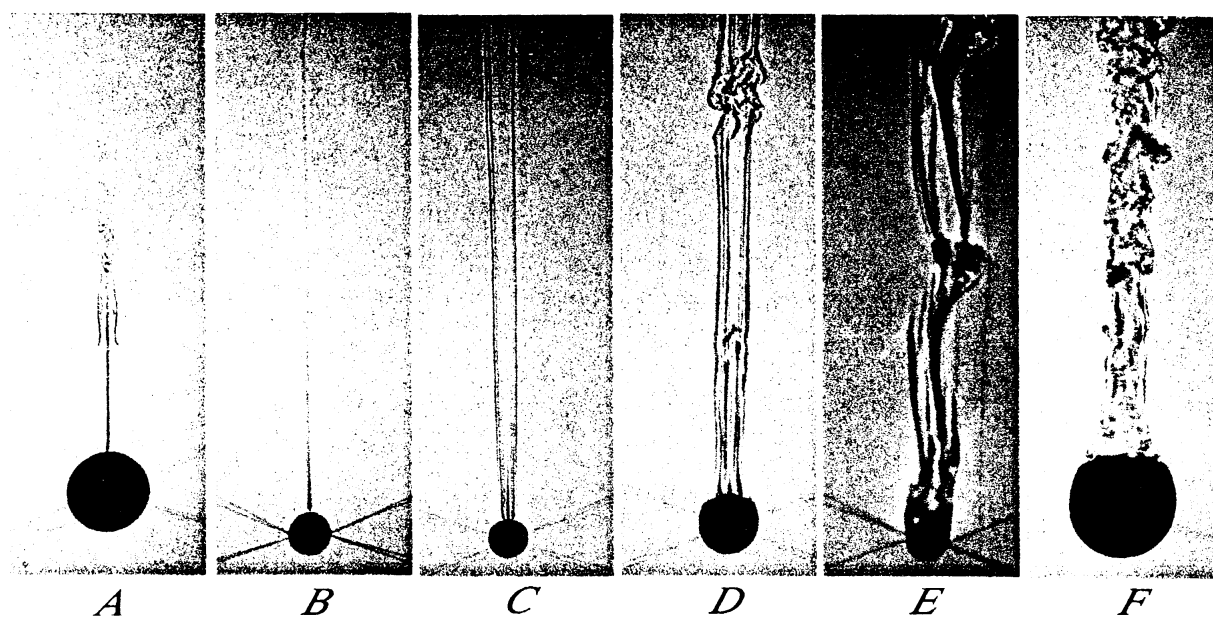
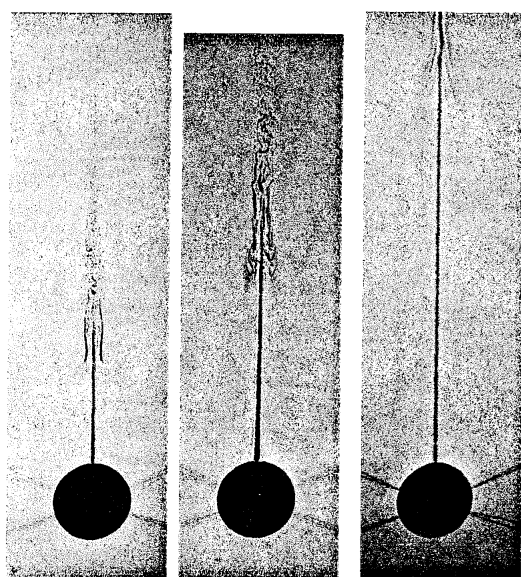


図4 タイプ A～F の流れの変化の様子.

(Re, Fr)=A:(199,0.32), B:(126,3.7), C:(610,6.5), D:(678,7.23), E:(413,46.1), F:(2637,4.3)



$Fr=0.3$ $Fr=0.8$ $Fr=1.5$

図5 領域Aのシャドウグラフによる可視化写真.

(左) $(Re, Fr)=(199, 0.32)$; (中央) $(476, 0.77)$; (右) $(206, 1.5)$.

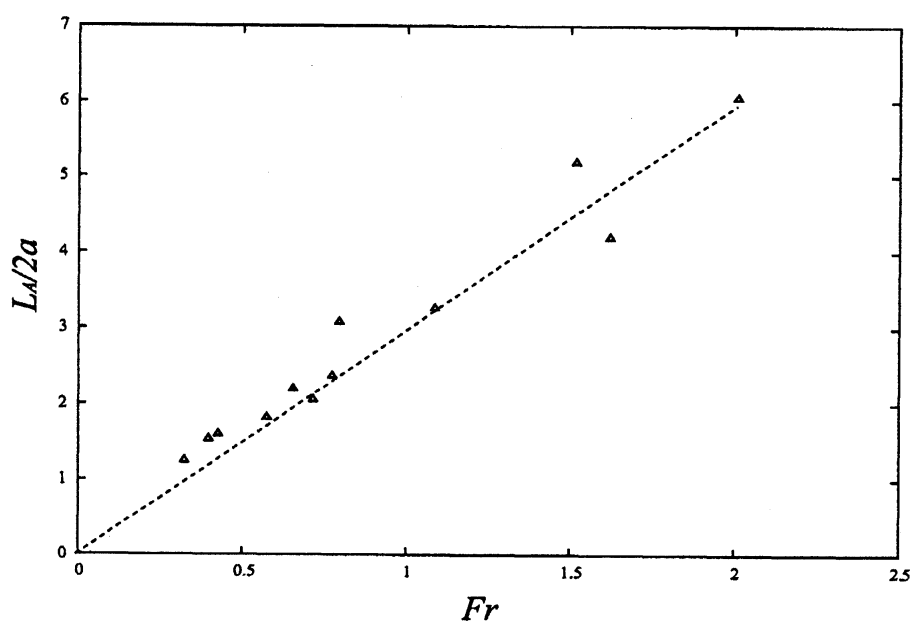


図6 タイプAにおける $L_A/2a$ (ジェットの長さ/球の直径) の Fr 依存性.

破線は $L_A/2a = 3Fr$ を示す.

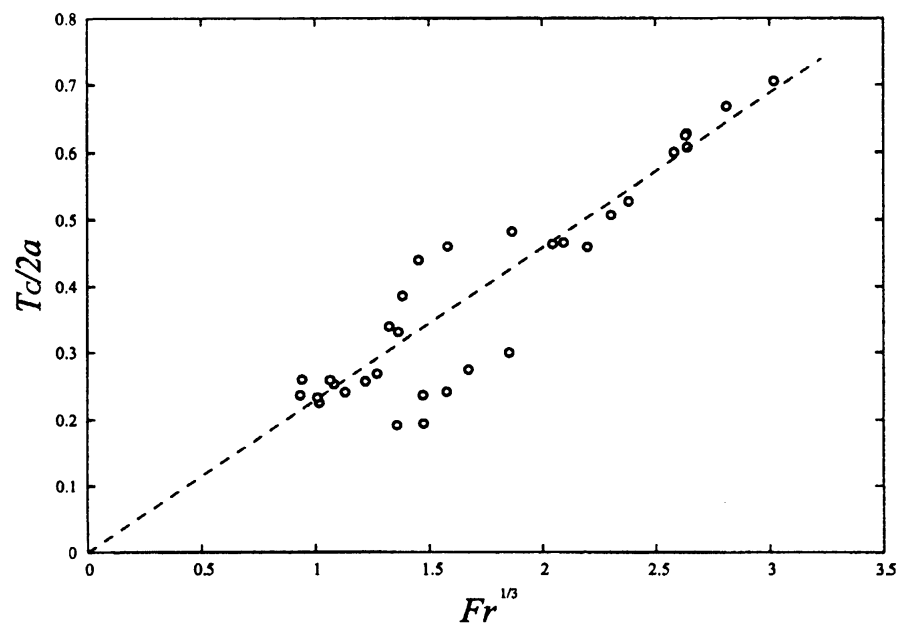


図7 タイプCにおける $T_C/2a$ (ジェット/球の直径) の $Fr^{-1/3}$ 依存性.

破線は $T_C/2a = 0.23 Fr^{-1/3}$ を示す.

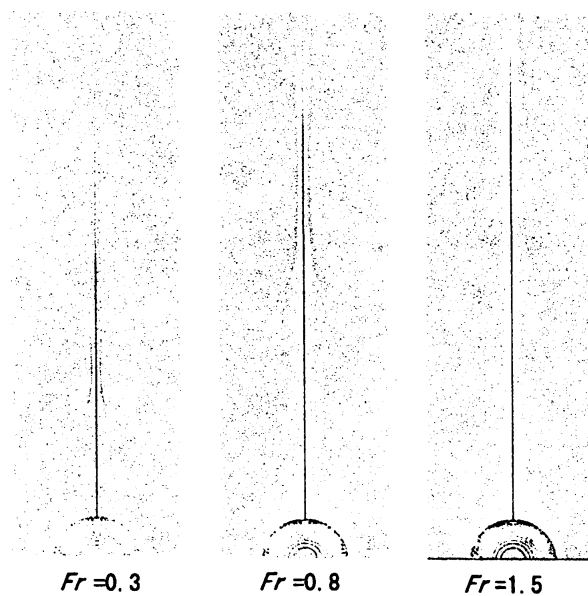


図8 数値計算 ($Re = 200$) から得られた式 (6.1) の値の分布図 (グレースケール表示).

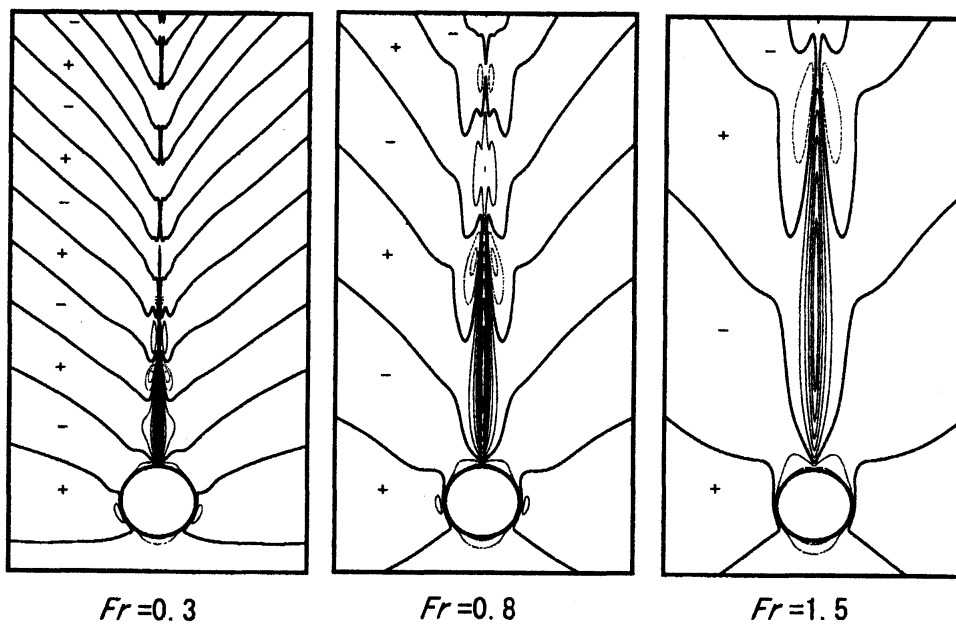


図9 実験室系 (静止系) から見た鉛直速度 w の等高線 (数値計算: $Re = 200$). 図中の + は $w > 0$ の領域 (細い実線)、- は $w < 0$ の領域 (破線) を示す. 太い実線は $w = 0$ を示す。